Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου από το Askisopolis 2023 - 2024

Αντώνης Βαλέργας | **Αποστόλης Κακαβάς**
Στέλιος Μιχαήλογλου | **Άγγελος Μπλιάς**
Θανάσης Νικολόπουλος | **Δημήτρης Πατσιμάς**
Βαγγέλης Ραμαντάνης | **Νίκος Σαμπάνης**
Βαγγέλης Τόλης | **Νίκος Τούντας**
Ισαάκ Χιονίδης


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Β΄ Λυκείου

Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 2 ωρών στα Διανύσματα

2023-2024

Θέμα Α

Α1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ με $x_1,x_2\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$.

μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Δύο αντίρροπα διανύσματα είναι αντίθετα.

β) Ισχύει $\vec{0}\perp\vec{\alpha}$ για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ του επιπέδου.

γ) Αν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ τότε $\vec{\alpha}=0$ ή $\vec{\beta}=0$.

δ) Για την γωνία φ που σχηματίζει ένα διάνυσμα με τον άξονα x΄x ισχύει $0\leq\varphi\leq 180^{o}$.

ε) Αν Μ το μέσο του ΑΒ τότε $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$.

μονάδες 10

Α3. Έστω οι παρακάτω τρεις ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$ για οποιαδήποτε μη μηδενικά και μη παράλληλα μεταξύ τους διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ »

Ισχυρισμός 2: «Ισχύει $\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^3$ για οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ »

Ισχυρισμός 3: «Ισχύει $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\alpha}=\vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}$ για οποιαδήποτε μη μηδενικά, μη κάθετα και μη παράλληλα μεταξύ τους διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ »

α) Να χαρακτηρίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς ως Αληθή ή Ψευδή.

β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

μονάδες 3+6=9

Θέμα Β

Θεωρούμε τα σημεία $A(-1,0)$, $B(x,2)$, $\Gamma(2x,2x+3)$ με $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να ορίσετε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\overrightarrow{AB}$ και $\vec{\beta}=\overrightarrow{B\Gamma}$.

μονάδες 2

Β2. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x΄x για: **α)** $x=-1$ και **β)** $x=1$.

μονάδες 1 + 3 = 4

Β3. Να προσδιορίσετε σημείο $\Delta(2x,y)$ με $x,y\in\mathbb{R}$, αν το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

μονάδες 5

Β4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο τα σημεία Α, Β και Γ να είναι συνευθειακά.

μονάδες 5

Β5. Αν για οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\delta}=(0,y_0)$, $y_0\in\mathbb{R}$, ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\delta}$, τότε να προσδιορίσετε το $x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 5

Β6. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$, $\vec{\beta} = (-2,1)$ και $\vec{u} = (8,1)$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

μονάδες 5

Γ2. Να γράψετε το $\vec{u} = (8,1)$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

μονάδες 6

Γ3. Αν $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}$ είναι δύο κάθετες συνιστώσες του $\vec{u} = (8,1)$ με την $\overrightarrow{\alpha_1}$ να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$, να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}$.

μονάδες 7

Γ4. Αν $\overrightarrow{\alpha_1} = (2,4)$, $\overrightarrow{\alpha_2} = (6,-3)$ να δείξετε ότι αν $\hat{\omega} = (\widehat{\overrightarrow{\alpha_1}, \vec{u}})$ τότε το $\text{συν}\omega = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.

μονάδες 7

Θέμα Δ

Σε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των διαγώνιων του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Αν τα σημεία Β , Κ και Δ δεν είναι συνευθειακά και $\left|\overrightarrow{\text{ΑΔ}}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{\text{ΒΓ}}\right| = 4$, $\left|\overrightarrow{\text{ΚΛ}}\right| = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$, τότε:

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\text{ΑΒ}} + \overrightarrow{\text{ΓΒ}} + \overrightarrow{\text{ΓΔ}} + \overrightarrow{\text{ΑΔ}} = 4 \cdot \overrightarrow{\text{ΚΛ}}$

μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει:

$$3 \cdot \overrightarrow{\text{ΚΒ}} + 2 \cdot \overrightarrow{\text{ΚΔ}} = x \cdot \overrightarrow{\text{ΚΛ}} + y \cdot \overrightarrow{\text{ΒΔ}}$$

μονάδες 9

Δ3. Να βρείτε τη γωνία την οποία σχηματίζουν οι πλευρές του ΑΔ και ΒΓ.

μονάδες 10

Καλή τύχη!

Λύση

Θέμα Α

Α1. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \dfrac{y_1}{x_2}\dfrac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}} = -1$.

Α2. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Α3. α) Και οι 3 ισχυρισμοί είναι Ψευδείς.

β) Για το ισχυρισμό 1:

Επειδή τα διανύσματα είναι μη μηδενικά και μη παράλληλα ισχύει ότι:

$|\vec{\alpha}| \neq 0,\ |\vec{\beta}| \neq 0,\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \neq 0^\circ \Rightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \neq 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \neq 180^\circ \Rightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \neq -1$.

Τότε $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2 \Leftrightarrow \left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)^2 = |\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow$

$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\text{συν}^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = |\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2 \Leftrightarrow \text{συν}^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 1 \Leftrightarrow \text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \pm 1$ άτοπο.

Για τον ισχυρισμό 2: Ο συμβολισμός $\vec{\alpha}^3$ δεν ορίζεται

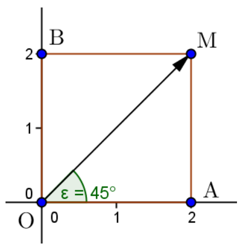
Για τον ισχυρισμό 3: $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2 \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \dfrac{|\vec{\alpha}|^{\cancel{2}}}{\cancel{|\vec{\alpha}|}\,|\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)} \cdot \vec{\beta}$ (1)

Αν $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)} = \kappa \in \mathbb{R}$ τότε η (1) είναι της μορφής $\vec{\alpha} = \kappa \cdot \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} // \vec{\beta}$ που είναι άτοπο.

Θέμα Β

Β1. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB} = (x+1, 2)$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{B\Gamma} = (2x - x, 2x + 3 - 2) = (x, 2x+1)$.

Β2. α) Για $x = -1$ είναι $\vec{\alpha} = (0,2)$ οπότε είναι κάθετο στον άξονα x΄x.



β) Για $x = 1$ είναι $\vec{\alpha} = (2,2)$.

1ος τρόπος: $\lambda_{\vec{\alpha}} = 1 = \text{εφ}\omega \Leftrightarrow \omega = 45^\circ$ γιατί το διάνυσμα βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.

2ος τρόπος: Έστω $\overrightarrow{OM} = \vec{\alpha}$ με O(0,0), M(2,2) και A(2,0), B(0,2) οι προβολές του M πάνω στους άξονες. Το OAMB είναι τετράγωνο άρα η ζητούμενη γωνία είναι 45^o αφού η OM διχοτόμος.

Β3. Για να είναι το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow (2x+1, y) = (x, 2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x \\ 2x+1 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$. Άρα $\Delta(-2,-1)$.

Β4. Είναι $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) = \begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ x & 2x+1 \end{vmatrix} = (x+1)(2x+1) - 2x = 2x^2 + x + 2x + 1 - 2x = 2x^2 + x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta = -7 < 0$. Άρα $\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) \neq 0$.Επομένως τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά άρα τα σημεία Α,Β,Γ δεν είναι συνευθειακά..

Β5. Επειδή το $\vec{\delta}=(0,y_0)$ είναι μη μηδενικό τότε $y_0 \neq 0$.

Ισχύει $\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\delta} \Leftrightarrow (x+1)\cdot 0+2y_0=x\cdot 0+(2x+1)y_0 \Leftrightarrow 2y_0=(2x+1)y_0 \overset{y_0\neq 0}{\Leftrightarrow} 2=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Β6. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow (x+1)x+2(2x+1)=0 \Leftrightarrow x^2+x+4x+2=0 \Leftrightarrow x^2+5x+2=0$

Το τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta=17>0$ άρα έχει δύο ρίζες οπότε υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ για το οποίο το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

Θέμα Γ

Γ1. $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0 \Leftrightarrow (1,2)\cdot(-2,1)=0 \Leftrightarrow -2+2=0$, που ισχύει.

Γ2. Έστω κ, λ πραγματικοί με $\vec{u}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta} \Leftrightarrow (8,1)=\kappa(1,2)+\lambda(-2,1) \Leftrightarrow (8,1)=(\kappa,2\kappa)+(-2\lambda,\lambda) \Leftrightarrow$

$(8,1)=(\kappa-2\lambda,2\kappa+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa-2\lambda=8\\ 2\kappa+\lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa-2\lambda=8\\ 4\kappa+2\lambda=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa-2\lambda=8\\ 5\kappa=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\kappa-2\lambda=8\\ \kappa=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=-3\\ \kappa=2\end{cases}$.

Άρα $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$.

Γ3. Από τα προηγούμενα ερωτήματα έχουμε ότι $\vec{u}=2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ άρα $2\vec{\alpha}\perp-3\vec{\beta}$.

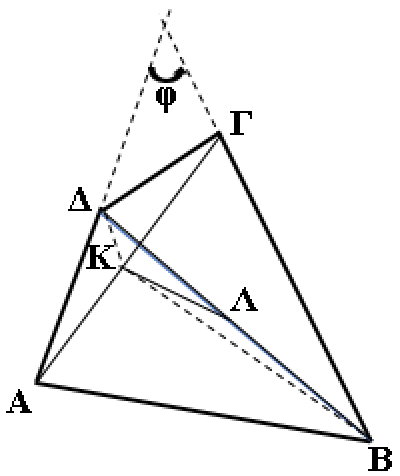
Άρα $\vec{\alpha_1}=2\vec{\alpha}=2(1,2)=(2,4)$ και $\vec{\alpha_2}=-3\vec{\beta}=-3(-2,1)=(6,-3)$.

Γ4. $\text{συνω}=\frac{\vec{\alpha_1}\vec{u}}{|\vec{\alpha_1}||\vec{u}|}=\frac{(2,4)\cdot(8,1)}{|(2,4)||(8,1)|}=\frac{16+4}{\sqrt{4+16}\sqrt{64+1}}=\frac{20}{\sqrt{20}\sqrt{65}}=\frac{20}{2\sqrt{5}\sqrt{13.5}}=\frac{20}{2\cdot 5\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Θέμα Δ

Δ1. Τα δύο πρώτα διανύσματα της ζητούμενης ισότητας είναι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ , στο οποίο έχουμε τη διάμεσο ΚΒ, οπότε:

$\vec{KB}=\frac{\vec{AB}+\vec{\Gamma B}}{2} \Leftrightarrow \vec{AB}+\vec{\Gamma B}=2\cdot\vec{KB}$ (1)



Επίσης , τα διανύσματα $\vec{\Gamma\Delta}$ και $\vec{A\Delta}$ αποτελούν πλευρές του τριγώνου ΑΔΓ με διάμεσο τη ΚΔ , έτσι:

$\vec{K\Delta}=\frac{\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Delta}}{2} \Leftrightarrow \vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Delta}=2\cdot\vec{K\Delta}$ (2)

Άρα , το πρώτο μέλος της ζητούμενης ισότητας , λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2), γίνεται:

$\vec{AB}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Delta}=2\vec{KB}+2\vec{K\Delta}=2\left(\vec{KB}+\vec{K\Delta}\right)$.

Το άθροισμα της παρένθεσης μας οδηγεί στο τρίγωνο ΚΒΔ με τη διάμεσο του ΚΛ:

$\vec{K\Lambda}=\frac{\vec{KB}+\vec{K\Delta}}{2} \Leftrightarrow \vec{KB}+\vec{K\Delta}=2\cdot\vec{K\Lambda}$.

Έτσι , $\vec{AB}+\vec{\Gamma B}+\vec{\Gamma\Delta}+\vec{A\Delta}=2\vec{KB}+2\vec{K\Delta}=2\left(\vec{KB}+\vec{K\Delta}\right)=2\cdot\left(2\vec{K\Lambda}\right)=4\vec{K\Lambda}$.

Δ2. Στο προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι $\vec{K\Lambda}=\frac{\vec{KB}+\vec{K\Delta}}{2}$. Επίσης $\vec{B\Delta}=\vec{BK}+\vec{K\Delta}=-\vec{KB}+\vec{K\Delta}$.

(Προσπαθούμε στη δοσμένη σχέση $3\cdot\overrightarrow{\text{KB}}+2\cdot\overrightarrow{\text{K}\Delta}=x\cdot\overrightarrow{\text{K}\Lambda}+y\cdot\overrightarrow{\text{B}\Delta}$ να εμφανίσουμε μόνο τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{KB}},\overrightarrow{\text{K}\Delta}$).

Είναι $3\cdot\overrightarrow{\text{KB}}+2\cdot\overrightarrow{\text{K}\Delta}=x\cdot\overrightarrow{\text{K}\Lambda}+y\cdot\overrightarrow{\text{B}\Delta}\Longrightarrow 3\cdot\overrightarrow{\text{KB}}+2\cdot\overrightarrow{\text{K}\Delta}=x\cdot\dfrac{\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Delta}}{2}+y\cdot\left(\overrightarrow{K\Delta}-\overrightarrow{\text{KB}}\right)$, δηλαδή

$6\overrightarrow{\text{KB}}+4\overrightarrow{\text{K}\Delta}=x\cdot\left(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Delta}\right)+2y\cdot\left(\overrightarrow{\text{K}\Delta}-\overrightarrow{\text{KB}}\right)\Leftrightarrow 6\overrightarrow{\text{KB}}+4\overrightarrow{\text{K}\Delta}=x\cdot\overrightarrow{KB}+x\cdot\overrightarrow{\text{K}\Delta}+2y\overrightarrow{\text{K}\Delta}-2y\overrightarrow{\text{KB}}\Leftrightarrow$

$6\overrightarrow{\text{KB}}-x\cdot\overrightarrow{\text{KB}}+2y\cdot\overrightarrow{KB}=x\cdot\overrightarrow{\text{K}\Delta}+2y\overrightarrow{\text{K}\Delta}-4\overrightarrow{\text{K}\Delta}\Leftrightarrow\left(6-x+2y\right)\overrightarrow{\text{KB}}=\left(x+2y-4\right)\overrightarrow{\text{K}\Delta}$.

Αν ήταν $6-x+2y\neq 0$, τότε $\overrightarrow{\text{KB}}=\dfrac{x+2y-4}{6-x+2y}\cdot\overrightarrow{K\Delta}$, δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{KB}}$ και $\overrightarrow{\text{K}\Delta}$ θα ήταν συγγραμμικά , άτοπο λόγω της υπόθεσης (τα Β , Κ και Δ δεν είναι συνευθειακά).Έτσι, $6-x+2y=0$.

Αν ήταν $x+2y-4\neq 0$, τότε $\overrightarrow{\text{K}\Delta}=\dfrac{6-x+2y}{x+2y-4}\cdot\overrightarrow{K\text{B}}$, δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{\text{KB}}$ και $\overrightarrow{\text{K}\Delta}$, επίσης, θα ήταν συγγραμμικά , άτοπο (τα σημεία Β , Κ και Δ δεν είναι συνευθειακά) .Οπότε $x+2y-4=0$.

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα $\begin{cases}6-x+2y=0\\ x+2y-4=0\end{cases}$ βρίσκουμε $x=5$ και $y=-\dfrac{1}{2}$.

Δ3. Είναι $\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\overrightarrow{\text{KA}}+\overrightarrow{\text{A}\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}$ και $\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\overrightarrow{\text{K}\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\text{B}}+\overrightarrow{\text{B}\Lambda}$. Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο παραπάνω σχέσεων , παίρνουμε $2\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\left(\overrightarrow{\text{KA}}+\overrightarrow{\text{K}\Gamma}\right)+\overrightarrow{\text{A}\Delta}+\overrightarrow{\Gamma\text{B}}+\left(\overrightarrow{\Delta\Lambda}+\overrightarrow{\text{B}\Lambda}\right)\Leftrightarrow 2\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\vec{0}+\overrightarrow{\text{A}\Delta}-\overrightarrow{\text{B}\Gamma}+\vec{0}$, δηλαδή $2\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\overrightarrow{\text{A}\Delta}-\overrightarrow{\text{B}\Gamma}$.

Συνήθως όταν έχουμε μέτρα υψώνουμε στο τετράγωνο για να φύγουν και να εφαρμόσουμε τις ταυτότητες. Εδώ θα ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία ,ώστε να δημιουργήσουμε εσωτερικό γινόμενο , που θα βάλει στη σχέση μας την γωνία των διανυσμάτων. Έτσι:

$2\overrightarrow{\text{K}\Lambda}=\overrightarrow{\text{A}\Delta}-\overrightarrow{\text{B}\Gamma}\Rightarrow\left(2\overrightarrow{\text{K}\Lambda}\right)^2=\left(\overrightarrow{\text{A}\Delta}-\overrightarrow{\text{B}\Gamma}\right)^2\Leftrightarrow 4\overrightarrow{\text{K}\Lambda}^2=\overrightarrow{\text{A}\Delta}^2-2\overrightarrow{\text{A}\Delta}\cdot\overrightarrow{\text{B}\Gamma}+\overrightarrow{\text{B}\Gamma}^2$ και έτσι παίρνουμε

$4\left|\overrightarrow{\text{K}\Lambda}\right|^2=\left|\overrightarrow{\text{A}\Delta}\right|^2-2\left|\overrightarrow{\text{A}\Delta}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\text{B}\Gamma}\right|\cdot\text{συν}\left(\underbrace{\widehat{\overrightarrow{\text{A}\Delta},\overrightarrow{\text{B}\Gamma}}}_{\varphi}\right)+\left|\overrightarrow{\text{B}\Gamma}\right|^2$. Αντικαθιστούμε τα δοσμένα μέτρα , οπότε:

$4\cdot\left(\sqrt{5-2\sqrt{3}}\right)^2=2^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\text{συνφ}+4^2\Leftrightarrow 4\cdot\left|5-2\sqrt{3}\right|=4-16\text{συνφ}+16\overset{5-2\sqrt{3}>0}{\Longleftrightarrow}$

$4\left(5-2\sqrt{3}\right)=20-16\text{συνφ}\Leftrightarrow 20-8\sqrt{3}=20-16\text{συνφ}\Leftrightarrow\text{συνφ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, δηλαδή $\varphi=30^{\text{o}}$.